第 62 卷 第 2 期 中山大学学报（自然科学版）（中英文） Vol. 62 No. 2
2023 年 3 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Mar. 2023

DOI：10. 13471/j. cnki. acta. snus. 2021A094

有界线性算子的(R)性质及亚循环性*

胡添翼，窦艳妮

陕西师范大学数学与统计学院，陕西 西安 710119

摘 要： 令 H 为无限维复可分的Hilbert空间，$B(H)$ 为 H 上有界线性算子的全体。$\sigma(T)$ 表示算子 $T \in B(H)$ 的谱集。称算子 $T \in B(H)$ 满足 (R) 性质，若 $\sigma_a(T) \backslash \sigma_{ab}(T) = \pi_{00}(T)$，其中 $\sigma_a(T)$，$\sigma_{ab}(T)$ 分别表示算子 T 的逼近点谱和Browder本质逼近点谱，$\pi_{00}(T) = \{\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T): 0 < n(T - \lambda I) < +\infty\}$. 给出了有界线性算子满足 (R) 性质的新的判定方法，并讨论了算子的 (R) 性质和亚循环性之间的关系。

关键词：（R）性质；亚循环性；谱

中图分类号： O177.2 **文献标志码：** A **文章编号：** 2097－0137（2023）02－0172－09

The property (R) and the hypercyclic property for bounded linear operators

HU Tianyi, DOU Yanni

School of Mathematics and Statistics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China

Abstract: Let H be an infinite dimensional separable complex Hilbert space and $B(H)$ be the algebra of all bounded linear operators on H. $\sigma(T)$ denotes the spectrum of $T \in B(H)$. $T \in B(H)$ is said to satisfy property (R) if $\sigma_a(T) \backslash \sigma_{ab}(T) = \pi_{00}(T)$, where $\sigma_a(T)$ and $\sigma_{ab}(T)$ denote the approximate point spectrum and the Browder essential approximate spectrum of T respectively, $\pi_{00}(T) = \{\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T): 0 < n(T - \lambda I) < +\infty\}$. A new judgement for property (R) for bounded linear operator is given. In additional, the relations between the property (R) and the hypercyclic property are considered.

Key words: property (R); hypercyclic property; spectrum

在本文，H 表示无限维复可分的Hilbert空间，$B(H)$ 为 H 上的有界线性算子的全体。对集合 $E \subseteq \mathbb{C}$，用 $\operatorname{iso}E$ 表示 E 中孤立点的全体，$\operatorname{acc}E$ 表示 E 中聚点的全体。如果 $\operatorname{iso}\sigma(T) \subseteq \sigma_p(T)$，则称 T 为isoloid算子，其中 $\sigma_p(T)$ 为算子 T 的点谱，即 $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: T - \lambda I$ 不为单算子$\}$。设 $T \in B(H)$，$R(T)$ 和 $N(T)$ 分别表示 T 的值域和零空间，令 $n(T) = \dim N(T)$，$d(T) = \dim(H/R(T))$，算子 $T \in B(H)$ 称为上半Fredholm算子，若 T 的值域 $R(T)$ 闭且 $n(T) < +\infty$；如果 $d(T) < +\infty$，那么称 $T \in B(H)$ 为下半Fredholm算子。$T \in B(H)$，若 T 既为上半Fredholm算子又为下半Fredholm算子，则称为Fredholm算子。对一个半Fredholm算子 T 来说，无论上半或者下半，其指标定义为 $\operatorname{ind}(T) = n(T) - d(T)$. 算子 T 的升标 $\operatorname{asc}(T)$ 定义为满足 $N(T^n) = N(T^{n+1})$ 的最小非负整数 n，如果其不存在，那么我们记 $\operatorname{asc}(T) = +\infty$；而 T 的降标 $\operatorname{des}(T)$ 定义为满足 $R(T^n) = R(T^{n+1})$ 的最小非负整数 n，如果其不存在，那么我们记 $\operatorname{des}(T) = +\infty$. T 称为是Weyl算子，如果 T 是指标为零的Fredholm算子；我们把Browder算子定义为有有限升降标的Fredholm算子。特别地，称 $T \in B(H)$ 为

* **收稿日期：** 2021－11－22 **录用日期：** 2022－02－21 **网络首发日期：** 2022－12－30

基金项目： 陕西省自然科学基金（2021JM-189）

作者简介： 胡添翼（1998年生），男；**研究方向：** 算子代数与算子理论；E-mail：tianyihu@snnu.edu.cn

通信作者： 窦艳妮（1978年生），女；**研究方向：** 算子代数与算子理论；E-mail：douyn@snnu.edu.cn

下有界算子则是指T是上半Fredholm算子且$n(T)=0$.令$\sigma(T)$、$\sigma_a(T)$、$\sigma_w(T)$、$\sigma_b(T)$、$\sigma_{ea}(T)$和$\sigma_{ab}(T)$分别表示T的谱、逼近点谱、Weyl谱、Browder谱、本质逼近点谱和Browder本质逼近点谱。其具体定义如下：

算子T的谱$\sigma(T)\coloneqq\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda I$不是可逆算子$\}$;

算子T的逼近点谱$\sigma_a(T)\coloneqq\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda I$不是下有界算子$\}$;

算子T的Weyl谱$\sigma_w(T)\coloneqq\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda I$不是Weyl算子$\}$;

算子T的Browder谱$\sigma_b(T)\coloneqq\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda I$不是Browder算子$\}$;

算子T的本质逼近点谱$\sigma_{ea}(T)\coloneqq\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda I$不是上半Fredholm算子或$\mathrm{ind}(T-\lambda I)>0\}$;

算子T的Browder逼近点谱$\sigma_{ab}(T)\coloneqq\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda I$不是上半Fredholm算子或$\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}$.

记$\rho_w(T)=\mathbb{C}\backslash\sigma_w(T)$，$\rho_b(T)=\mathbb{C}\backslash\sigma_b(T)$，$\sigma_0(T)=\sigma(T)\backslash\sigma_b(T)$，$\rho_{ea}(T)=\mathbb{C}\backslash\sigma_{ea}(T)$，用$\mathbf{D}$表示单位圆。

Weyl(1909)发现Hilbert空间中自伴算子的Weyl谱恰好与该算子的谱集除去有限重的孤立特征值相同，这个结论被称作Weyl定理。之后，随着许多数学学者将Weyl定理深入的研究，发现了一些变型和推广(Harte, 1997; Rakočević, 1985; Rakočević, 1989)。其中(R)性质是Weyl定理的一种变型，近年来备受关注(Aiena et al., 2011; Aiena et al., 2013; Jia, 2020)。目前对于(R)性质的判定，除了定义，没有别的办法。算子的其他谱集和(R)性质之间有什么关系？这是我们应该考虑的问题。由于(R)性质和算子的升降标、Fredholm指标以及Fredholm摄动理论等有着密切的关系，于是我们希望用算子的升降标、指标以及Fredholm算子的摄动理论给出(R)性质的新的判定方法。这样将(R)性质的判定方法多样化。在本文中，利用新的谱集，我们给出了(R)性质的新的判定方法。之后讨论了算子的(R)性质和亚循环性之间的关系。

1　有界线性算子的(R)性质的判定

对$T\in B(H)$，若

$$\sigma_a(T)\backslash\sigma_{ab}(T)=\pi_{00}(T),$$

称T满足(R)性质(记作$T\in(R)$)，其中$\pi_{00}(T)=\{\lambda\in\mathrm{iso}\,\sigma(T):0<n(T-\lambda I)<+\infty\}$.

首先，我们定义一个新的谱集，令

$$\rho_1(T)=\Big\{\lambda\in\mathbb{C}:n(T-\lambda I)<+\infty,\text{ 且存在}\varepsilon>0,\text{使得}$$
$$\text{当}0<|\mu-\lambda|<\varepsilon\text{时},\mu\notin\sigma_w(T)\text{并且}N(T-\mu I)\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}R[(T-\mu I)^n]\Big\}.$$

令$\sigma_1(T)=\mathbb{C}\backslash\rho_1(T)$，显然$\sigma_1(T)\subseteq\sigma_w(T)\subseteq\sigma_b(T)\subseteq\sigma(T)$.

下面我们用$\sigma_1(T)$给出(R)性质的新的判定方法。

定理 1　设$T\in B(H)$，则T满足(R)性质当且仅当$\sigma_b(T)=[\sigma_1(T)\cap\sigma_{ea}(T)]\cup\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}\cup\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}$.

证明　设T满足(R)性质。包含关系$[\sigma_1(T)\cap\sigma_{ea}(T)]\cup\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}\cup\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}\subseteq\sigma_b(T)$显然成立。

下证$\sigma_b(T)\subseteq[\sigma_1(T)\cap\sigma_{ea}(T)]\cup\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}\cup\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}$.

对任给$\lambda_0\notin[\sigma_1(T)\cap\sigma_{ea}(T)]\cup\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}\cup\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}$，不妨设$\lambda_0\in\sigma(T)$，则$n(T-\lambda_0 I)>0$. 由$\lambda_0\notin\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}$知存在$\varepsilon'>0$使得当$0<|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon'$时，$\mathrm{asc}(T-\lambda I)<+\infty$.下面分为两种情况：

情况Ⅰ：$\lambda_0\notin\sigma_1(T)$.

由$\rho_1(T)$的定义知$n(T-\lambda_0 I)<+\infty$，且存在$\varepsilon>0$（$\varepsilon<\varepsilon'$），使得当$0<|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$时，$T-\lambda I$为Weyl算子且$N(T-\lambda I)\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}R[(T-\lambda I)^n]$. 又由于$\mathrm{asc}(T-\lambda I)<+\infty$，则$N(T-\lambda I)=N(T-\lambda I)\cap\bigcap_{n=1}^{\infty}R[(T-\lambda I)^n]=\{0\}$(见引理3.4(Taylor, 1966))。于是$T-\lambda I$可逆，从而$\lambda_0\in\mathrm{iso}\,\sigma(T)$.又$0<n(T-$

$\lambda_0 I) < +\infty$，故 $\lambda_0 \in \pi_{00}(T)$. 由 T 满足 (R) 性质知，$\lambda_0 \notin \sigma_b(T)$.

情况II：$\lambda_0 \notin \sigma_{ea}(T)$.

此时存在 $\varepsilon > 0$（$\varepsilon < \varepsilon'$），使得当 $0 < \left|\mu - \lambda_0\right| < \varepsilon$ 时，$T - \mu I$ 为上半 Fredholm 算子，$\operatorname{ind}(T - \mu I) \leqslant 0$ 且 $N(T - \mu I) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} R[(T - \mu I)^n]$. 类似于情况 I 的证明，可得 $N(T - \mu I) = \{0\}$，即 $T - \mu I$ 下有界，于是 $\lambda_0 \in \sigma_a(T) \backslash \sigma_{ab}(T)$. 由 T 满足 (R) 性质知 $\lambda_0 \notin \sigma_b(T)$. 由上述证明知 $\sigma_b(T) = [\sigma_1(T) \cap \sigma_{ea}(T)] \cup \operatorname{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{asc}(T - \lambda I) = +\infty\} \cup \{\lambda \in \sigma(T): n(T - \lambda I) = 0\}$.

反之，由于 $[\sigma_a(T) \backslash \sigma_{ab}(T) \cup \pi_{00}(T)] \cap \{[\sigma_1(T) \cap \sigma_{ea}(T)] \cup \operatorname{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{asc}(T - \lambda I) = +\infty\} \cup \{\lambda \in \sigma(T): n(T - \lambda I) = 0\}\} = \varnothing$，故 $\{[\sigma_a(T) \backslash \sigma_{ab}(T) \cup \pi_{00}(T)] \cap \sigma_b(T)\} = \varnothing$，于是 $\sigma_a(T) \backslash \sigma_{ab}(T) \subseteq \rho_b(T)$，$\pi_{00}(T) \subseteq \rho_b(T)$. 这样就有 $\sigma_a(T) \backslash \sigma_{ab}(T) = \pi_{00}(T)$，即 T 满足 (R) 性质。 证毕

注1 在定理1中，当 T 满足 (R) 性质时，$\sigma_b(T)$ 分解的三部分缺一不可。

例1 令 $A, B \in B(\ell^2)$ 定义为：$A(x_1, x_2, x_3, \cdots) = \left(0, 0, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \cdots\right)$，$B(x_1, x_2, x_3, \cdots) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \cdots\right)$. 定义 $T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in B(\ell^2 \oplus \ell^2)$. 因为 $\sigma_a(T) = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$，$\sigma_{ab}(T) = \{0\}$ 且 $\pi_{00}(T) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$，则 T 满足 (R) 性质。但由于 $\sigma_b(T) = \{0\}$ 且 $\operatorname{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{asc}(T - \lambda I) = +\infty\} = \{\lambda \in \sigma(T): n(T - \lambda I) = 0\} = \varnothing$，故 $\sigma_b(T) \neq \operatorname{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{asc}(T - \lambda I) = +\infty\} \cup \{\lambda \in \sigma(T): n(T - \lambda I) = 0\}$.

例2 令 $A, B \in B(\ell^2)$ 定义为：$A(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, x_1, x_2, x_3 \cdots)$，$B(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_2, x_3, x_4 \cdots)$. 定义 $T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in B(\ell^2 \oplus \ell^2)$. 因为 $\sigma_a(T) = \mathbf{D}$，$\sigma_{ab}(T) = \mathbf{D}$ 且 $\pi_{00}(T) = \varnothing$，则 T 满足 (R) 性质。但由于 $\sigma_b(T) = \mathbf{D}$，且 $[\sigma_1(T) \cap \sigma_{ea}(T)] = \mathbb{T}$，$\{\lambda \in \sigma(T): n(T - \lambda I) = 0\} = \varnothing$，故 $\sigma_b(T) \neq [\sigma_1(T) \cap \sigma_{ea}(T)] \cup \{\lambda \in \sigma(T): n(T - \lambda I) = 0\}$.

例3 令 $T \in B(\ell^2)$ 定义为：$T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, x_1, x_2, x_3 \cdots)$. 由于 $\sigma_a(T) = \sigma_{ab}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| = 1\}$，$\pi_{00}(T) = \varnothing$，故 T 满足 (R) 性质。但由于 $\sigma_b(T) = \mathbf{D}$，且 $[\sigma_1(T) \cap \sigma_{ea}(T)] = \mathbb{T}$，$\operatorname{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{asc}(T - \lambda I) = +\infty\} = \varnothing$，故 $\sigma_b(T) \neq [\sigma_1(T) \cap \sigma_{ea}(T)] \cup \operatorname{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{asc}(T - \lambda I) = +\infty\}$.

注2 在定理1中，将“$\sigma_1(T) \cap \sigma_{ea}(T)$”改为 $\sigma_1(T)$ 或 $\sigma_{ea}(T)$，不能推出 T 满足 (R) 性质。

例4 令 $T \in B(\ell^2)$ 定义为 $T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = \left(0, 0, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \cdots\right)$. 则

$$\sigma_b(T) = \sigma_{ea}(T) \cup \operatorname{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{asc}(T - \lambda I) = +\infty\} \cup \{\lambda \in \sigma(T): n(T - \lambda I) = 0\} = \{0\}.$$

由于 $\sigma_a(T) = \sigma_{ab}(T) = \{0\}$，$\pi_{00}(T) = \{0\}$，即 $\sigma_a(T) \backslash \sigma_{ab}(T) \neq \pi_{00}(T)$，故 T 不满足 (R) 性质。

例5 令 $A, B \in B(\ell^2)$ 定义为：$A(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, x_1, x_2, x_3, \cdots)$，$B(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, x_2, x_3, x_4, \cdots)$. 设 $T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in B(\ell^2 \oplus \ell^2)$. 则 $\sigma_b(T) = \sigma_1(T) \cup \operatorname{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{asc}(T - \lambda I) = +\infty\} \cup \{\lambda \in \sigma(T): n(T - \lambda I) = 0\}$. 但是由于 $\sigma_a(T) = \{0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| = 1\}$，$\sigma_{ab}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| = 1\}$，$\pi_{00}(T) = \varnothing$，故 $\sigma_a(T) \backslash \sigma_{ab}(T) \neq \pi_{00}(T)$，从而 T 不满足 (R) 性质。

算子的其他谱集和 (R) 性质之间有什么关系呢？接下来我们继续考虑 (R) 性质的判定。

令 $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: R(T - \lambda I)$ 不闭 $\}$. 根据 $\rho_1(T)$ 的定义可知

$$[\operatorname{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cap \sigma_c(T)] \subseteq \sigma_1(T) \cap \sigma_{ea}(T),$$

$$\{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) = +\infty\} \subseteq \sigma_1(T) \cap \sigma_{ea}(T).$$

又由 $[\sigma_1(T) \cap \operatorname{acc}\sigma_a(T)] \subseteq [\sigma_1(T) \cap \sigma_{ea}(T)] \cup \operatorname{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{asc}(T - \lambda I) = +\infty\}$，于是当

$$\sigma_b(T) = [\sigma_1(T) \cap \operatorname{acc}\sigma_a(T)] \cup \operatorname{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{asc}(T - \lambda I) = +\infty\} \cup [\operatorname{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cap \sigma_c(T)] \cup \{\lambda \in \sigma(T): n(T - \lambda I) = 0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) = +\infty\}$$

时，包含关系 $\sigma_b(T) \subseteq [\sigma_1(T) \cap \sigma_{ea}(T)] \cup \operatorname{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{asc}(T - \lambda I) = +\infty\} \cup \{\lambda \in \sigma(T): n(T - \lambda I) = 0\}$ 成立。又由于反包含显然成立，于是有

$$\sigma_b(T) = [\sigma_1(T) \cap \sigma_{ea}(T)] \cup \operatorname{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{asc}(T - \lambda I) = +\infty\} \cup \{\lambda \in \sigma(T): n(T - \lambda I) = 0\}.$$

从而由定理1知，T满足(R)性质。类似于由定理1的必要性证明，可得：

推论1　设$T\in B(H)$，则T满足(R)性质当且仅当$\sigma_b(T)=[\sigma_1(T)\cap \mathrm{acc}\,\sigma_a(T)]\cup \mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}\cup[\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbb{C}:n(T-\lambda I)<d(T-\lambda I)\}\cap\sigma_c(T)]\cup\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:n(T-\lambda I)=+\infty\}$.

我们断言：

$$[\sigma_1(T)\cap\sigma_{ea}(T)]\subseteq[\sigma_1(T)\cap\{\lambda\in\mathbb{C}:n(T-\lambda I)\geqslant d(T-\lambda I)\}]\\ \cup\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}\cup[\mathrm{acc}\,\sigma(T)\cap\sigma_c(T)].$$

事实上，若$\lambda_0\notin[\sigma_1(T)\cap\{\lambda\in\mathbb{C}:n(T-\lambda I)\geqslant d(T-\lambda I)\}]\cup\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}\cup[\mathrm{acc}\,\sigma(T)\cap\sigma_c(T)]$，不妨设$\lambda_0\in\sigma(T)$，于是$n(T-\lambda_0 I)>0$. 若$\lambda_0\notin\sigma_1(T)$，则$\lambda_0\notin[\sigma_1(T)\cap\sigma_{ea}(T)]$. 下面设$\lambda_0\in\sigma_1(T)$. 于是$0<n(T-\lambda_0 I)<d(T-\lambda_0 I)$.下面分两种情况：

情况I：$\lambda\notin\mathrm{acc}\,\sigma(T)$. 此时由$\rho_1(T)$的定义可知，$\lambda_0\in\rho_1(T)$，于是$\lambda_0\notin[\sigma_1(T)\cap\sigma_{ea}(T)]$.

情况II：$\lambda_0\notin\sigma_c(T)$. 于是$T-\lambda_0 I$为上半Fredholm算子且$\mathrm{ind}(T-\lambda_0 I)<0$，即$\lambda_0\notin\sigma_{ea}(T)$，从而再次证得$\lambda_0\notin[\sigma_1(T)\cap\sigma_{ea}(T)]$.

断言得证。

另外，由于$[\sigma_1(T)\cap\{\lambda\in\mathbb{C}:n(T-\lambda I)\geqslant d(T-\lambda I)\}]\subseteq[\sigma_1(T)\cap\sigma_{ea}(T)]$，$[\mathrm{acc}\,\sigma(T)\cap\sigma_c(T)]\subseteq[\sigma_1(T)\cap\sigma_{ea}(T)]\cup[\rho_1(T)\cap\sigma(T)]\subseteq[\sigma_1(T)\cap\sigma_{ea}(T)]\cup\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}$，根据定理1，可证得下列事实：

推论2　设$T\in B(H)$，则T满足(R)性质当且仅当$\sigma_b(T)=[\sigma_1(T)\cap\{\lambda\in\mathbb{C}:n(T-\lambda I)\geqslant d(T-\lambda I)\}]\cup\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}\cup\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}\cup[\mathrm{acc}\,\sigma(T)\cap\sigma_c(T)]$.

在前面的定理及推论中，若用$\mathrm{acc}\,\sigma_1(T)$代替$\sigma_1(T)$，类似于定理1的证明，可证得：

推论3　设$T\in B(H)$，则下列叙述等价：

(i) T满足(R)性质；

(ii) $\sigma_b(T)=[\mathrm{acc}\,\sigma_1(T)\cap\sigma_{ea}(T)]\cup\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}\cup\mathrm{acciso}\,\sigma(T)\cup\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:n(T-\lambda I)=+\infty\}$;

(iii) $\sigma_b(T)=[\mathrm{acc}\,\sigma_1(T)\cap\mathrm{acc}\,\sigma_a(T)]\cup\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}\cup\mathrm{acciso}\,\sigma(T)\cup[\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbb{C}:n(T-\lambda I)<d(T-\lambda I)\}\cap\sigma_c(T)]\cup\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:n(T-\lambda I)=+\infty\}$;

(iv) $\sigma_b(T)=[\mathrm{acc}\,\sigma_1(T)\cap\{\lambda\in\mathbb{C}:n(T-\lambda I)\geqslant d(T-\lambda I)\}]\cup\mathrm{acciso}\,\sigma(T)\cup\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}\cup\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}\cup[\mathrm{acc}\,\sigma(T)\cap\sigma_c(T)]\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:n(T-\lambda I)=+\infty\}$.

由(R)性质的定义，当$[\sigma_a(T)\backslash\sigma_{ab}(T)]\cup\pi_{00}(T)\subseteq\rho_w(T)$时，$T$有$(R)$性质.下面我们用$\sigma_1(T)$与$\sigma_w(T)$的关系来刻画$(R)$性质。

定理2　设$T\in B(H)$，则T满足(R)性质当且仅当$\sigma_w(T)=[\sigma_1(T)\cap\sigma_{ea}(T)]\cup\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}\cup[\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}\cap\{\lambda\in\mathbb{C}:n(T-\lambda I)<d(T-\lambda I)\}]$.

证明　对必要性，包含关系$[\sigma_1(T)\cap\sigma_{ea}(T)]\cup\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}\cup[\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}\cap\{\lambda\in\mathbb{C}:n(T-\lambda I)<d(T-\lambda I)\}]\subseteq\sigma_w(T)$显然成立。

对反包含，设$\lambda_0\notin[\sigma_1(T)\cap\sigma_{ea}(T)]\cup\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}\cup[\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}\cap\{\lambda\in\mathbb{C}:n(T-\lambda I)<d(T-\lambda I)\}]$. 不妨设$\lambda_0\in\sigma(T)$，则$n(T-\lambda_0 I)>0$. 由$\lambda_0\notin\sigma_1(T)\cap\sigma_{ea}(T)$，分为两种情况：

情况I：$\lambda_0\notin\sigma_1(T)$.

由定理1的证明可知，

$$\sigma_w(T)\subseteq\sigma_b(T)\subseteq[\sigma_1(T)\cup\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}\cup\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}].$$

此时可设$\lambda_0\notin\{\lambda\in\mathbb{C}:n(T-\lambda I)<d(T-\lambda I)\}]$，则$T-\lambda_0 I$为Fredholm算子且$\mathrm{ind}(T-\lambda_0 I)\geqslant 0$. 据$\rho_1(T)$的定义以及半Fredholm算子的摄动定理可知，此时$T-\lambda_0 I$为Weyl算子，于是$\lambda_0\notin\sigma_w(T)$.

情况II：$\lambda_0 \notin \sigma_{ea}(T)$.

由定理1的证明可知

$$\sigma_w(T) \subseteq \sigma_b(T) \subseteq [\sigma_{ea}(T) \cup \{\lambda \in \sigma(T): n(T-\lambda I)=0\} \cup \mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: \mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}].$$

此时我们可设$\lambda_0 \notin \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T-\lambda I) < d(T-\lambda I)\}]$，则$T-\lambda_0 I$为Fredholm算子且$\mathrm{ind}(T-\lambda_0 I)=0$，即$T-\lambda_0 I$为Weyl算子，于是$\lambda_0 \notin \sigma_w(T)$.

对充分性，由于

$$[\sigma_a(T) \backslash \sigma_{ab}(T) \cup \pi_{00}(T)] \cap [\sigma_1(T) \cap \sigma_{ea}(T)] \cup \{\lambda \in \sigma(T): n(T-\lambda I)=0\}$$
$$\cup [\mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: \mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\} \cap \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T-\lambda I) < d(T-\lambda I)\}] = \varnothing,$$

故$[\sigma_a(T) \backslash \sigma_{ab}(T) \cup \pi_{00}(T)] \cap \sigma_w(T) = \varnothing$. 则$\sigma_a(T) \backslash \sigma_{ab}(T) \subseteq \rho_w(T)$，$\pi_{00}(T) \subseteq \rho_w(T)$. 于是$\sigma_a(T) \backslash \sigma_{ab}(T) = \pi_{00}(T)$，即$T$满足$(R)$性质。

同样有例子表明，在定理2中，当T满足(R)性质时，$\sigma_w(T)$分解的三部分缺一不可。

在定理2中，若用$\mathrm{acc}\,\sigma_1(T)$，则得以下推论：

推论4 设$T \in B(H)$，则T满足(R)性质当且仅当$\sigma_w(T) = [\mathrm{acc}\,\sigma_1(T) \cap \sigma_{ea}(T)] \cup [\mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: \mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\} \cap \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T-\lambda I) < d(T-\lambda I)\}] \cup \mathrm{acciso}\,\sigma(T) \cup \{\lambda \in \sigma(T): n(T-\lambda I)=0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T-\lambda I)=+\infty\}$.

证明 必要性。由定理2知，

$$\sigma_w(T) = [\sigma_1(T) \cap \sigma_{ea}(T)] \cup \{\lambda \in \sigma(T): n(T-\lambda I)=0\}$$
$$\cup [\mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: \mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\} \cap \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T-\lambda I) < d(T-\lambda I)\}].$$

由于$\sigma_1(T) \cap \sigma_{ea}(T) = [\mathrm{acc}\,\sigma_1(T) \cap \sigma_{ea}(T)] \cup [\mathrm{iso}\,\sigma_1(T) \cap \sigma_{ea}(T)] \subseteq [\mathrm{acc}\,\sigma_1(T) \cap \sigma_{ea}(T)] \cup \mathrm{iso}\,\sigma_1(T)$，而$\mathrm{iso}\,\sigma_1(T) \subseteq [\mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: \mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\} \cap \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T-\lambda I) < d(T-\lambda I)\}] \cup \mathrm{acciso}\,\sigma(T) \cup \mathrm{iso}[\sigma_1(T) \cap \mathrm{iso}\,\sigma(T)]$，又由于$[\mathrm{iso}\,\sigma_1(T) \cap \mathrm{iso}\,\sigma(T)] \subseteq \{\lambda \in \sigma(T): n(T-\lambda I)=0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T-\lambda I)=+\infty\}$.

于是

$$\mathrm{iso}\,\sigma_1(T) \subseteq [\mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: \mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\} \cap \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T-\lambda I) < d(T-\lambda I)\}] \cup \mathrm{acciso}\,\sigma(T)$$
$$\cup \{\lambda \in \sigma(T): n(T-\lambda I)=0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T-\lambda I)=+\infty\}.$$

所以

$$\sigma_w(T) \subseteq [\mathrm{acc}\,\sigma_1(T) \cap \sigma_{ea}(T)] \cup [\mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: \mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\} \cap \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T-\lambda I) < d(T-\lambda I)\}]$$
$$\cup\, \mathrm{acciso}\,\sigma(T) \cup \{\lambda \in \sigma(T): n(T-\lambda I)=0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T-\lambda I)=+\infty\}.$$

反包含显然成立，故$\sigma_w(T) = [\mathrm{acc}\,\sigma_1(T) \cap \sigma_{ea}(T)] \cup [\mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: \mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\} \cap \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T-\lambda I) < d(T-\lambda I)\}] \cup \mathrm{acciso}\,\sigma(T) \cup \{\lambda \in \sigma(T): n(T-\lambda I)=0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T-\lambda I)=+\infty\}$.

充分性。由于$[\rho_{ea}(T) \cup \rho_1(T)] \cap \mathrm{acciso}\,\sigma(T) = \varnothing$，故$\mathrm{acciso}\,\sigma(T) \subseteq [\sigma_1(T) \cap \sigma_{ea}(T)]$. 又由

$$\mathrm{acc}\,\sigma_1(T) \cap \sigma_{ea}(T) \subseteq [\sigma_1(T) \cap \sigma_{ea}(T)], \qquad \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T-\lambda I)=+\infty\} \subseteq [\sigma_1(T) \cap \sigma_{ea}(T)],$$

于是

$$\sigma_w(T) \subseteq [\sigma_1(T) \cap \sigma_{ea}(T)] \cup \{\lambda \in \sigma(T): n(T-\lambda I)=0\}$$
$$\cup [\mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: \mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\} \cap \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T-\lambda I) < d(T-\lambda I)\}].$$

反包含显然成立，故$\sigma_w(T) = [\sigma_1(T) \cap \sigma_{ea}(T)] \cup \{\lambda \in \sigma(T): n(T-\lambda I)=0\} \cup [\mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: \mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\} \cap \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T-\lambda I) < d(T-\lambda I)\}]$. 由定理2知$T$满足$(R)$性质。 证毕

由定理2以及(R)性质之间的定义，结合算子的各种谱集之间的关系，我们可以证得下列结论：

推论5 设$T \in B(H)$，则下列叙述等价：

（i）T满足(R)性质；

(ii) $\sigma_w(T) = [\sigma_1(T) \cap \mathrm{acc}\,\sigma_a(T)] \cup [\mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: \mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\} \cap \sigma_c(T)] \cup [\mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: n(T-\lambda I) < d(T-\lambda I)\} \cap \sigma_c(T)] \cup \{\lambda \in \sigma(T): n(T-\lambda I)=0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T-\lambda I)=+\infty\}$;

（iii） $\sigma_w(T) = [\sigma_1(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T-\lambda I) \geqslant d(T-\lambda I)\}] \cup [\mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: \mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\} \cap \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T-\lambda I) < d(T-\lambda I)\}] \cup \{\lambda \in \sigma(T): n(T-\lambda I)=0\} \cup [\mathrm{acc}\,\sigma(T) \cap \sigma_c(T)]$;

（iv） $\sigma_w(T) = [\mathrm{acc}\,\sigma_1(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T-\lambda I) \geqslant d(T-\lambda I)\}] \cup [\mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: \mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\} \cap \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T-\lambda I) < d(T-\lambda I)\}] \cup \mathrm{acciso}\,\sigma(T) \cup \{\lambda \in \sigma(T): n(T-\lambda I)=0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T-\lambda I)=+\infty\} \cup$

$[\operatorname{acc}\sigma(T)\cap\sigma_c(T)]$;

(v) $\sigma_w(T)=[\operatorname{acc}\sigma_1(T)\cap\operatorname{acc}\sigma_a(T)]\cup[\operatorname{acc}\{\lambda\in\mathbb{C}:\operatorname{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}\cap\sigma_c(T)]\cup[\operatorname{acc}\{\lambda\in\mathbb{C}:n(T-\lambda I)<d(T-\lambda I)\}\cap\sigma_c(T)]\cup\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:n(T-\lambda I)=+\infty\}\cup\operatorname{acciso}\sigma(T)$.

2 有界线性算子的(*R*)性质与亚循环性之间的关系

令$T\in B(H)$，对$x\in H$，x在T下的轨道定义为

$$\operatorname{Orb}(T,x)=\{x,Tx,T^2x,\cdots\}.$$

若$\operatorname{Orb}(T,x)$在H中稠密的，称$x\in H$为算子T的亚循环向量。若算子T有亚循环向量，则称T为亚循环算子。下面用$HC(H)$表示$B(H)$上的亚循环算子的全体，$\overline{HC(H)}$表示$HC(H)$的范数闭包。亚循环性是Hilden et al.(1974)引入的。同样，Kitai(1982)给出了亚循环性质的许多基本理论。近年来，算子的亚循环性和Weyl定理之间的关系备受关注(Cao，2006；Dai et al.，2021)。(*R*)性质是Weyl定理的一种变型，于是算子的亚循环性和(*R*)性质之间的关系值得我们去考虑。本节中，我们继续这方面的工作，讨论算子的亚循环性和(*R*)性质之间的关系。设$\rho_{SF}(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda I$为半Fredholm算子$\}$. 为此我们先看一个引理：

引理1(Herrero，1991) 设$T\in B(H)$，则$T\in\overline{HC(H)}$当且仅当下列3条成立：

(i) $\sigma_w(T)\cup\partial\mathbf{D}$连通；

(ii) $\sigma_0(T)=\sigma(T)\backslash\sigma_b(T)=\varnothing$;

(iii) 对$\lambda\in\rho_{SF}(T)$，有$\operatorname{ind}(T-\lambda I)\geqslant 0$.

注3 $T\in\overline{HC(H)}\nRightarrow T\in(R)$，即$T$有亚循环性不能说明$T$满足(*R*)性质。

例6 设$A\in B(\ell^2)$定义为：$A(x_1,x_2,x_3,\cdots)=\left(0,0,\dfrac{x_2}{2},\dfrac{x_3}{3},\cdots\right)$，令$T=A+I$. 由引理1知，$T\in\overline{HC(H)}$，但$\sigma_a(T)=\sigma_{ab}(T)=\pi_{00}(T)=\{1\}$，故$T$不满足(*R*)性质。

注4 $T\in(R)\nRightarrow T\in\overline{HC(H)}$.

例7 $T\in B(\ell^2)$定义为：$T(x_1,x_2,x_3,\cdots)=(0,x_1,x_2,x_3\cdots)$，则$\sigma_a(T)=\sigma_{ab}(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|=1\}$，$\pi_{00}(T)=\varnothing$，即$T$满足(*R*)性质。但对任给$\lambda\in\rho_{SF}(T)$且$|\lambda|<1$，都有$\operatorname{ind}(T-\lambda I)<0$，故$T\notin\overline{HC(H)}$.

注5 存在算子$T\in B(H)$，使得T不满足(*R*)性质且$T\notin\overline{HC(H)}$.

例8 设$A,B\in B(\ell^2)$定义为

$$A(x_1,x_2,x_3,\cdots)=(0,x_1,x_2,x_3\cdots),\qquad B(x_1,x_2,x_3,\cdots)=(0,x_2,x_3,x_4\cdots).$$

令$T=\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}\in B(\ell^2\oplus\ell^2)$. 由于$\sigma_a(T)=\{0\}\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|=1\}$，$\sigma_{ab}(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|=1\}$，$\pi_{00}(T)=\varnothing$，于是$T$不满足(*R*)性质。由于对于$\lambda\in\rho_{SF}(T)$且$|\lambda|<1$都有$\operatorname{ind}(T-\lambda I)<0$，故$T\notin\overline{HC(H)}$.

注6 若$T\in\overline{HC(H)}$，则$\sigma_a(T)=\sigma_{ab}(T)=\sigma(T)$. 于是当$T\in\overline{HC(H)}$时，$T$有(*R*)性质当且仅当$\pi_{00}(T)=\varnothing$.

由注3~6可知，$T\in\overline{HC(H)}$与T满足(*R*)性质没有必然的联系，并且这两种性质不一定同时成立。下面我们给出这两种性质同时成立的条件：

定理3 设$\sigma(T)=[\sigma_1(T)\cap\{\lambda\in\mathbb{C}:n(T-\lambda I)\geqslant d(T-\lambda I)\}]\cup[\operatorname{acc}\sigma(T)\cap\sigma_c(T)]$连通。若多项式$p$满足：存在$\lambda_0\in\sigma(T)$使得$|p(\lambda_0)|=1$，则$p(T)\in\overline{HC(H)}$.

证明 由于

$$\sigma_0(T)\cap[\sigma_1(T)\cap\{\lambda\in\mathbb{C}:n(T-\lambda I)\geqslant d(T-\lambda I)\}]=\varnothing,\qquad \sigma_0(T)\cap[\operatorname{acc}\sigma(T)\cap\sigma_c(T)]=\varnothing,$$

故$\sigma_0(T)=\sigma_0(T)\cap\sigma(T)=\varnothing$. 由$\sigma_0(p(T))\subseteq p(\sigma_0(T))$知$\sigma_0(p(T))=\varnothing$.

又由于

$$\{\lambda\in\rho_{SF}(T):n(T-\lambda I)<d(T-\lambda I)\}\cap[\sigma_1(T)\cap\{\lambda\in\mathbb{C}:n(T-\lambda I)\geqslant d(T-\lambda I)\}]=\varnothing,$$

$$\{\lambda\in\rho_{SF}(T):n(T-\lambda I)<d(T-\lambda I)\}\cap[\operatorname{acc}\sigma(T)\cap\sigma_c(T)]=\varnothing,$$

从而$\{\lambda\in\rho_{SF}(T):n(T-\lambda I)<d(T-\lambda I)\}=\{\lambda\in\rho_{SF}(T):n(T-\lambda I)<d(T-\lambda I)\}\cap\sigma(T)=\varnothing$，即对于$\lambda\in\rho_{SF}(T)$，有$\operatorname{ind}(T-\lambda I)\geqslant 0$，从而$\operatorname{ind}(p(T)-\lambda I)\geqslant 0$.

由证明知，任意$\lambda,\mu \in \rho_e(T)$，$\operatorname{ind}(T-\lambda I)\cdot \operatorname{ind}(T-\mu I)\geqslant 0$，故$\sigma_w(\cdot)$满足谱映射定理（见定理5（Harte et al., 1997））。又由已知条件可证得$\sigma(T)=\sigma_w(T)$，故$\sigma_w(p(T))=p(\sigma_w(T))=p(\sigma(T))$连通。而$\lambda_0\in\sigma(T)$，$p(\lambda_0)\in\partial\mathbf{D}$，且$p(\lambda_0)\in p(\sigma(T))=\sigma_w(p(T))$. 故由$\sigma_w(p(T))$与$\partial D$均连通知$\sigma_w(p(T))\cup\partial\mathbf{D}$连通。由引理1知$p(T)\in\overline{HC(H)}$. 证毕

由定理3的证明可得：

推论6 设$\sigma(T)=[\sigma_1(T)\cap\{\lambda\in\mathbb{C}: n(T-\lambda I)\geqslant d(T-\lambda I)\}]\cup[\operatorname{acc}\sigma(T)\cap\sigma_c(T)]$连通。若多项式$p$满足$p(T)$不为拟幂零算子，则存在$c\in\mathbb{C}$使得$cp(T)\in\overline{HC(H)}$.

结合推论6以及定理3，可得：

推论7 设$\sigma(T)=[\sigma_1(T)\cap\{\lambda\in\mathbb{C}: n(T-\lambda I)\geqslant d(T-\lambda I)\}]\cup[\operatorname{acc}\sigma(T)\cap\sigma_c(T)]$. 若$\sigma(T)\cap\partial\mathbf{D}$连通，则$T$满足$(R)$性质且$T\in\overline{HC(H)}$.

在推论7中，当T满足(R)性质且$T\in\overline{HC(H)}$时，并不能推出$\sigma(T)=[\sigma_1(T)\cap\{\lambda\in\mathbb{C}: n(T-\lambda I)\geqslant d(T-\lambda I)\}]\cup[\operatorname{acc}\sigma(T)\cap\sigma_c(T)]$.

例如：设$A,B\in B(\ell^2)$定义为

$$A(x_1,x_2,x_3,\cdots)=(0,x_1,x_2,x_3\cdots),\qquad B(x_1,x_2,x_3,\cdots)=(x_2,x_3,x_4\cdots),$$

令$T=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\in B(\ell^2\oplus\ell^2)$. 由于$\sigma_a(T)=\sigma_{ab}(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|\leqslant 1\}$，$\pi_{00}(T)=\varnothing$，于是$T$满足$(R)$性质。根据引理1可验证$T\in\overline{HC(\ell^2\oplus\ell^2)}$. 但是$\sigma(T)=\mathbf{D}$，而

$$[\sigma_1(T)\cap\{\lambda\in\mathbb{C}: n(T-\lambda I)\geqslant d(T-\lambda I)\}]\cup[\operatorname{acc}\sigma(T)\cap\sigma_c(T)]=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|=1\}.$$

定理4 设$T\in B(H)$，则下列叙述等价：

（i）T满足(R)性质，$T\in\overline{HC(H)}$，T为isoloid算子并且$\sigma_w(T)=\sigma(T)$；

（ii）$\sigma(T)=[\sigma_1(T)\cap\{\lambda\in\mathbb{C}: n(T-\lambda I)\geqslant d(T-\lambda I)\}]\cup[\operatorname{acc}\sigma(T)\cap\sigma_c(T)]$且$\sigma(T)\cap\partial\mathbf{D}$连通。

证明 (ii)⇒(i)。由推论7知T满足(R)性质且$T\in\overline{HC(H)}$. 从定理3的证明中可知$\sigma_w(T)=\sigma(T)$. 由于$\{\lambda\in\operatorname{iso}\sigma(T): n(T-\lambda I)=0\}\cap\{[\sigma_1(T)\cap\{\lambda\in\mathbb{C}: n(T-\lambda I)\geqslant d(T-\lambda I)\}]\cup[\operatorname{acc}\sigma(T)\cap\sigma_c(T)]\}=\varnothing$，于是

$$\{\lambda\in\operatorname{iso}\sigma(T): n(T-\lambda I)=0\}=\{\lambda\in\operatorname{iso}\sigma(T): n(T-\lambda I)=0\}\cap\sigma(T)=\varnothing,$$

从而$\operatorname{iso}\sigma(T)\subseteq\sigma_p(T)$，即$T$为isoloid算子。

下面证明(i)⇒(ii)。对于任意$\lambda_0\notin[\sigma_1(T)\cap\{\lambda\in\mathbb{C}: n(T-\lambda I)\geqslant d(T-\lambda I)\}]\cup[\operatorname{acc}\sigma(T)\cap\sigma_c(T)]$，断言$\lambda_0\notin\sigma_1(T)$.

事实上，若$\lambda_0\in\sigma_1(T)$，则$\lambda_0\notin\{\lambda\in\mathbb{C}: n(T-\lambda I)\geqslant d(T-\lambda I)\}$，即$n(T-\lambda_0 I)<d(T-\lambda_0 I)$，从而$n(T-\lambda_0 I)<+\infty$. 由$\lambda_0\notin[\operatorname{acc}\sigma(T)\cap\sigma_c(T)]$及$T$为isoloid算子知$0<n(T-\lambda_0 I)<+\infty$，$\lambda_0\in\operatorname{iso}\sigma(T)$，则$\lambda_0\in\pi_{00}(T)$或者$T-\lambda_0 I$为上半Fredholm算子且$\operatorname{ind}(T-\lambda_0 I)<0$. 由于$T$满足$(R)$性质且$T\in\overline{HC(H)}$知$\pi_{00}(T)=\varnothing$且任给$\lambda\in\rho_{SF}(T)$，$\operatorname{ind}(T-\lambda I)\geqslant 0$. 于是得到了矛盾，从而断言成立。

由$\lambda_0\notin\sigma_1(T)$以及$\sigma_w(T)=\sigma(T)$，结合$\rho_1(T)$定义可知，$\lambda_0\in\operatorname{iso}\sigma(T)\cup\rho(T)$且$n(T-\lambda_0 I)<+\infty$. 又由$T$为isoloid算子知$\lambda_0\in\pi_{00}(T)\cup\rho(T)$. 由$T\in(R)$即$\sigma_a(T)\backslash\sigma_{ab}(T)=\pi_{00}(T)$及$T\in\overline{HC(H)}$知$\sigma_a(T)=\sigma_{ab}(T)$，$\pi_{00}(T)=\varnothing$，故$\lambda_0\in\rho(T)$，即$\lambda_0\notin\sigma(T)$.

这样就有$\sigma(T)\subseteq[\sigma_1(T)\cap\{\lambda\in\mathbb{C}: n(T-\lambda I)\geqslant d(T-\lambda I)\}]\cup[\operatorname{acc}\sigma(T)\cap\sigma_c(T)]$. 反包含显然成立，于是

$$\sigma(T)=[\sigma_1(T)\cap\{\lambda\in\mathbb{C}: n(T-\lambda I)\geqslant d(T-\lambda I)\}]\cup[\operatorname{acc}\sigma(T)\cap\sigma_c(T)].$$

由$T\in\overline{HC(H)}$以及$\sigma(T)=\sigma_w(T)$知$\sigma(T)\cap\partial\mathbf{D}$连通。 证毕

由推论7之后和定理4之前的叙述可看出，在定理4的(i)中，条件"$\sigma(T)=\sigma_w(T)$以及T为isoloid算子"是本质的，不能去掉。接下来，我们将这两个条件去掉，继续讨论算子T同时满足两个性质的条件。

定理5 设$T\in B(H)$，则下列叙述等价：

（i）T满足(R)性质且$T\in\overline{HC(H)}$；

（ii）$\sigma(T)=[\sigma_1(T)\cap\sigma_{ea}(T)]\cup \mathrm{acc}\{\lambda\in\rho_w(T):\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}\cup\{\lambda\in\sigma_a(T):n(T-\lambda I)=0\}$ 且 $\sigma_w(T)\cap\partial\mathbf{D}$连通。

证明　必要性。设T满足(R)性质且$T\in\overline{HC(H)}$. 由引理1知$\sigma_w(T)\cap\partial\mathbf{D}$连通，$\sigma_{ea}(T)=\sigma_w(T)$且$\sigma(T)=\sigma_b(T)=\sigma_a(T)$. 利用条件$\sigma_{ea}(T)=\sigma_w(T)$可知$\sigma_1(T)\cap\sigma_{ea}(T)=\sigma_1(T)$.

任给$\lambda_0\notin[\sigma_1(T)\cap\sigma_{ea}(T)]\cup \mathrm{acc}\{\lambda\in\rho_w(T):\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}\cup\{\lambda\in\sigma_a(T):n(T-\lambda I)=0\}$，我们断言此时$\lambda_0\notin\sigma(T)$.

事实上，若$\lambda_0\in\sigma(T)$，则由$\lambda_0\notin[\sigma_1(T)\cap\sigma_{ea}(T)]$以及$\sigma_1(T)\cap\sigma_{ea}(T)=\sigma_1(T)$知，$0<n(T-\lambda_0 I)<\infty$且存在$\varepsilon>0$使得当$0<|\mu-\lambda_0|<\varepsilon$时，$T-\mu I$为Weyl算子并且$N(T-\mu I)\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}R[(T-\mu I)^n]$. 由于$\lambda_0\notin \mathrm{acc}\{\lambda\in\rho_w(T):\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}$，于是当$0<|\mu-\lambda_0|$充分小时，$\mathrm{asc}(T-\mu I)<+\infty$. 这样类似于定理1的证明，可得当$0<|\mu-\lambda_0|$充分小时，$T-\mu I$可逆。这样就证得$\lambda_0\in\pi_{00}(T)$. 这就与$\pi_{00}(T)=\varnothing$矛盾。

于是有

$$\sigma(T)\subseteq[\sigma_1(T)\cap\sigma_{ea}(T)]\cup \mathrm{acc}\{\lambda\in\rho_w(T):\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}\cup\{\lambda\in\sigma_a(T):n(T-\lambda I)=0\}.$$

反包含显然成立。故

$$\sigma(T)=[\sigma_1(T)\cap\sigma_{ea}(T)]\cup \mathrm{acc}\{\lambda\in\rho_w(T):\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}\cup\{\lambda\in\sigma_a(T):n(T-\lambda I)=0\}.$$

充分性。显然$\{\lambda\in\rho_{SF}(T):\mathrm{ind}(T-\lambda I)<0\}\cap[\sigma_1(T)\cap\sigma_{ea}(T)]=\varnothing$. 根据半Fredholm算子的摄动定理知，$\{\lambda\in\rho_{SF}(T):\mathrm{ind}(T-\lambda I)<0\}\subseteq \mathrm{int}\,\sigma_w(T)$，其中$\mathrm{int}\,\sigma_w(T)$表示$\sigma_w(T)$的内点的全体。于是

$$\{\lambda\in\rho_{SF}(T):\mathrm{ind}(T-\lambda I)<0\}\cap \mathrm{acc}\{\lambda\in\rho_w(T):\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}=\varnothing.$$

又由于

$$\{\lambda\in\rho_{SF}(T):\mathrm{ind}(T-\lambda I)<0\}\subseteq[\rho_a(T)\cup\{\lambda\in\sigma_a(T):n(T-\lambda I)>0\}],$$

故

$$\{\lambda\in\rho_{SF}(T):\mathrm{ind}(T-\lambda I)<0\}\cap\{\lambda\in\sigma_a(T):n(T-\lambda I)=0\}=\varnothing.$$

这样$\{\lambda\in\rho_{SF}(T):\mathrm{ind}(T-\lambda I)<0\}=\{\lambda\in\rho_{SF}(T):\mathrm{ind}(T-\lambda I)<0\}\cap\sigma(T)=\varnothing$，即任给$\lambda\in\rho_{SF}(T)$，$\mathrm{ind}(T-\lambda I)\geqslant 0$.

由于$\sigma_0(T)\cap[\sigma_1(T)\cap\sigma_{ea}(T)]=\varnothing$，$\sigma_0(T)\cap \mathrm{acc}\{\lambda\in\rho_w(T):\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}=\varnothing$，$\sigma_0(T)\cap\{\lambda\in\sigma_a(T):n(T-\lambda I)=0\}$，则可得$\sigma_0(T)=\varnothing$.

于是根据引理1，$T\in\overline{HC(H)}$. 又由于

$$\begin{aligned}\sigma(T)&=[\sigma_1(T)\cap\sigma_{ea}(T)]\cup \mathrm{acc}\{\lambda\in\rho_w(T):\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}\cup\{\lambda\in\sigma_a(T):n(T-\lambda I)=0\}\\&\subseteq[\sigma_1(T)\cap\sigma_{ea}(T)]\cup \mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}\cup\{\lambda\in\sigma_a(T):n(T-\lambda I)=0\},\end{aligned}$$

则$\sigma(T)=[\sigma_1(T)\cap\sigma_{ea}(T)]\cup \mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}\cup\{\lambda\in\sigma_a(T):n(T-\lambda I)=0\}$. 根据定理1可知$T$满足$(R)$性质。　证毕

类似于推论2和定理5的证明，可以证明下列结论：

推论8　设$T\in B(H)$，则下列叙述等价：

(i) T满足(R)性质且$T\in\overline{HC(H)}$；

(ii) $\sigma(T)=[\sigma_1(T)\cap\{\lambda\in\mathbb{C}:n(T-\lambda I)\geqslant d(T-\lambda I)\}]\cup \mathrm{acc}\{\lambda\in\rho_w(T):\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}\cup\{\lambda\in\sigma_a(T):n(T-\lambda I)=0\}\cup[\mathrm{acc}\,\sigma(T)\cap\sigma_c(T)]$且$\sigma(T)\cap\partial D$连通。

若$T\in\overline{HC(H)}$，则$\sigma(T)=\sigma_a(T)$且$\sigma_{ea}(T)=\sigma_w(T)$. 于是$\sigma_1(T)\cap\sigma_{ea}(T)=\sigma_1(T)$. 根据$\rho_1(T)$的定义，此时$\mathrm{acc}\{\lambda\in\rho_w(T):\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}=\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}$. 同时此时$\{\lambda\in\sigma_a(T):n(T-\lambda I)=0\}=\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}$. 由定理5，可得：

推论9　设$T\in B(H)$. 若$T\in\overline{HC(H)}$，则下列叙述等价：

(i) T满足(R)性质；

(ii) $\sigma(T)=\sigma_1(T)\cup \mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}\cup\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}$；

(iii) $\sigma(T)=\sigma_1(T)\cup \mathrm{acc}\,\sigma(T)\cup\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}$.

证明 由定理5可知(i)和(ii)的等价性。下面证明(i)和(iii)的等价性。设T满足(R)性质，则由推论8知

$$\sigma(T)=[\sigma_1(T)\cap\{\lambda\in\mathbb{C}:n(T-\lambda I)\geqslant d(T-\lambda I)\}]\cup \mathrm{acc}\{\lambda\in\rho_w(T):\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}$$
$$\cup\{\lambda\in\sigma_a(T):n(T-\lambda I)=0\}\cup[\mathrm{acc}\,\sigma(T)\cap\sigma_c(T)].$$

结合$\mathrm{acc}\{\lambda\in\rho_w(T):\mathrm{asc}(T-\lambda I)=+\infty\}\subseteq \mathrm{acc}\,\sigma(T)$且$\sigma_a(T)=\sigma(T)$，于是

$$\sigma(T)\subseteq\sigma_1(T)\cup\mathrm{acc}\,\sigma(T)\cup\{\lambda\in\sigma(T):\ n(T-\lambda I)=0\}.$$

反包含显然成立，则$\sigma(T)=\sigma_1(T)\cup\mathrm{acc}\,\sigma(T)\cup\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}$.

设(iii)成立，由$T\in\overline{HC(H)}$知$\sigma_a(T)=\sigma_{ab}(T)$，故只需要证明$\pi_{00}(T)=\varnothing$即可。由于$\pi_{00}(T)\cap\sigma_1(T)\cup\mathrm{acc}\,\sigma(T)\cup[\{\lambda\in\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}]=\varnothing$，则$\pi_{00}(T)=\pi_{00}(T)\cap\sigma(T)=\varnothing$. 于是$T$满足$(R)$性质。 证毕

参考文献：

AIENA P，APONTE E，GUILLÉN J R，et al，2013. Property (R) under perturbations[J]. Mediterr J Math，10(1)：367-382.

AIENA P，GUILLÉN J R，PEÑA P，2011. Property (R) for bounded linear operators[J]. Mediterr J Math，8(4)：491-508.

CAO X，2006. Weyl type theorem and hypercyclic operators[J]. J Math Anal Appl，323(1)：267-274.

DAI L，CAO X，GUO Q，2021. Property (ω) and the single-valued extension property[J]. Acta Math Sin（Engl Ser），37(8)：1254-1266.

HARTE R，LEE W Y，1997. Another note on Weyl's theorem[J]. Trans Amer Math Soc，349(5)：2115-2124.

HERRERO D A，1991. Limits of hypercyclic and supercyclic operators[J]. J Funct Anal，99(1)：179-190.

HILDEN H M，WALLEN L J，1974. Some cyclic and non-cyclic vectors of certain operators[J]. Indiana Univ Math J，23(7)：557-565.

JIA B，FENG Y，2020. Property (R) under compact perturbations[J]. Mediterr J Math，17(2)：73.

KITAI C，1982. Invariant closed sets for linear operators[D]. Toronto：Univ of Toronto.

RAKOČEVIĆ V，1985. On a class of operators[J]. Mat Vesnik，37(92)：423-425.

RAKOČEVIĆ V，1989. Operators obeying α-Weyl's theorem[J]. Rev Roumaine Math Pures Appl，34(10)：915-919.

TAYLOR A E，1966. Theorems on ascent，descent，nullity and defect of linear operators[J]. Math Ann，163(1)：18-49.

Von WEYL H，1909. Über beschränkte quadratische formen，deren differenz vollstetig ist[J]. Rend Circ Mat Palermo，27(1)：373-392.

（责任编辑 冯兆永）